LYCEE PRIVE D'ENSEIGNEMENT GENERAL TECHNOLOGIQUE ET SUPERIEUR

Enseignement supérieur
Classes préparatoires aux grandes écoles

– Consignes estivales pour préparer la rentrée –

Classe prépa ECG – 1e année

MATHEMATIQUES (ANALYSE)

Professeur :
M. Claude Sellier (sellier.lamerci@gmail.com)

Chers futurs élèves,
Pour ces vacances voici dix exercices portant sur des thèmes variés de la Terminale.
Toutes les questions sont à la portée d'un élève de Terminale mais demandent davantage de réflexion que ce qui est demandé au Bac.
N'hésitez pas à passer du temps dessus, voire beaucoup de temps.
La phase de recherche fait partie du jeu, elle est nécessaire pour progresser.
Avant de commencer, il y a plusieurs choses qu'il faut que vous sachiez :

- **La calculatrice est interdite en prépa ECG, donc il faut s'habituer à réfléchir sans cet outil, y compris pour ces dix exercices.**
- **Les exercices sont à rédiger et à rendre sur une copie le jour de la rentrée.**
- **Le but de ce devoir est de vous entraîner à chercher et à rédiger des questions non triviales et de vérifier votre connaissance et bonne compréhension du cours de Terminale. En recopiant un corrigé ou en se faisant aider, vous vous privez de cet entraînement, ce qui ne facilitera pas votre réussite aux concours, et vous privez votre professeur d'un moyen de détecter vos faiblesses et d'y remédier le cas échéant par des explications individuelles ou par une reprise du cours. En tout état de cause, ne recopiez jamais la réponse à une question sans l'avoir comprise mais allez plutôt revoir votre cours, cherchez-y des réponses et faites-vous confiance.**

Bon travail et bon été !!!

Exercice 1 Soit m un paramètre réel et l'équation du second degré d'inconnue x :

$$x^2 - 3mx + 9 = 0$$

1. Calculer le discriminant Δ de cette équation en fonction de m.
2. En déduire les valeurs de m pour lesquelles l'équation admet deux solutions réelles.

Exercice 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de $x > 0$ (justifier).
2. Calculer les images de e, $\frac{1}{e}$, e^2, $\sqrt{e}$ (valeurs exactes simplifiées).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-2x}dx$

1. Calculer u_n en fonction de n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 0^+ et 0^-.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. En considérant le trinôme $y^2 - y + 1$, montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 = 2017$ et pour tout entier n non nul $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$. Quelle est la valeur de u_{2017} ?

Exercice 6

1. Développer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ pour a et b réels positifs.
2. En déduire que pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.
3. En déduire que pour tous réels positifs a et b, on a $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n non nul $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 8 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x})$ pour tout réel x.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = x$.

Exercice 9 On dispose de deux urnes U et V. Dans U, il y a 2 boules noires et 2 boules blanches. Dans V il y a 6 boules noires et 2 boules blanches. On choisit une des deux urnes au hasard et on en extrait une boule.
On notera :
— U : "on choisit l'urne U"
— N : "on tire une boule noire".

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
2. On tire une boule noire. Quelle est alors la probabilité d'avoir pioché dans l'urne U ?

Exercice 10 Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ pour tout réel x.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = 1 - f'(x) - \frac{e^x}{1+e^x}$$

3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1 + 2\ln(2) - \left(\frac{e+1}{e}\right)\ln(1+e)$