Enseignement supérieur
Classes préparatoires aux grandes écoles

– Consignes estivales pour préparer la rentrée –

Classe prépa ECG – 2e année

MATHEMATIQUES (ANALYSE)

Professeur :
M. Claude Sellier (sellier.lamerci@gmail.com)

Mes chers élèves,
Pour cet été, il est essentiel que vous vous ressourciez et fassiez le plein de bonnes énergies pour être en forme à la rentrée car l'année va se passer très vite !!
Toutefois évidemment, il est essentiel que vous fassiez des maths aussi !!
Ainsi, je vous ai préparé un petit programme de révision en analyse.

- **Reprendre tous les DS et CB de la 1ère année, vraiment et en détail (que ce soit pour les calculs comme pour les raisonnements et pour la rédaction).**
- **Faire l'exercice 2 d'analyse d'ECRICOME 2022. Il porte sur les fonctions et les suites récurrentes. On en a beaucoup parlé en classe, maintenant à vous de jouer !!**
- **Faire l'exercice 2 d'analyse d'ECRICOME 2021. Il porte sur le calcul intégral et un peu de probabilités continues. Faites de votre mieux, ça n'est pas difficile, faites-vous confiance !!**

Enfin, sachez que je reste joignable via mon adresse mail, je répondrai dès que possible !!
Bon travail et bon été !!

1. ECRICOME 2022 (exercice 2) :

Pour tout réel $x > 0$, on pose : $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$.

Partie I : Etude de la fonction g

1. Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0,\ h(x) = \ln(x) + 2x - 1$.
   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
   (c) Démontrer que : $\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$.
   (d) En déduire les variations de la fonction g sur R∗+.

3. Démontrer que : $g(x) - x^2 \sim_{+\infty} -x\ln(x)$.

Partie II : Etude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$$
4. Démontrer par récurrence que ,pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
5. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel u0 et un entier n et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n + 1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$ u0.
6. (a) Etudier le signe de $(x - 1)\ln(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ \frac{g(x)}{x} \geq 1$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geq x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme seule solution.
7. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que : $u_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que : $u_0 > 1$.

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

(b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose que : $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

2. ECRICOME 2021 (exercice 2) :

Pour tout entier n supérieur où égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur où égal à 2.

1. (a) Démontrer que : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \sim_0 \ln(t)$.

(b) Démontrer que : $\forall y \in]0;1[,\ \int_y^1 \ln(t)\, dt = -1 + y - y\ln(y)$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.

(c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. (a) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n}$.

(b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur où égal à 2, on a :

$$\forall t \in]0;1],\ 0 \le \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \le -t^n \ln(t)$$

(b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

(c) Déduire des questions précédentes que : $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = -1$.

5.(a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \le \ln(x) \le x$.

En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \le \frac{\ln(x)}{1+x^n} \le \frac{1}{x^{n-1}}$.

(b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \le K_n \le \frac{1}{n-2}$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} K_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de Scilab.

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de]0,1].

A l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, montrer que :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du$$

7. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Donner une densité de X.

(b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$.

Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et que $E(Y_n) = J_n$.