La Merci MONTPELLIER

Programme de révision :
- Calcul algébrique, fonctions affines et fonctions de degré deux.
- Suites numériques
- Dérivations
- Probabilités
- La fonction exponenitelle
- Variables aléatoires

I Calcul algébrique-fonctions affines et de degré deux :

exercice 1 Développer, réduire et ordonner :

$A=5(2x-7)^2-3$

$B=-9(x-2)^2+6$

$C=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-3$

$D=3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{7}{12}$

exercice 2 On donne $f(x)=-3(x+4)(x-2)$.

1. Comment s'appelle la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de cette fonction ? Justifier.
2. Que peut dire de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ à partir de la forme donnée ?
3. Montrer que $f(x)=-3x^2-6x+24$.
4. Déterminer sa forme canonique.
5. En déduire son tableau de variations.

exercice 3 On donne trois formes pour un même polynôme :
- Forme 1 : $f(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{27}{4}$
- Forme 2 : $f(x)=3(x+1)(x-2)$
- Forme 3 : $f(x)=3x^2-3x-6$

1. Comment appelle-t-on chacune de ces formes ?
2. Vérifier que ces trois formes sont égales.
3. Dire pour chaque affirmation suivante si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse à l'aide de l'une des formes précédentes de $f(x)$.
   (a) -6 est l'image de 0 par f.
   (b) L'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.
   (c) $-\frac{27}{4}$ est le minimum de la fonction f.
   (d) $f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\right)$

II Signe d'une fonction affine et de degré deux

exercice 4 Donner le tableau de signes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x+1$ $\quad g(x) = 7-x$ $\quad h(x) = \frac{3}{5}x-5$
2. $f(x) = -2x^2+x-1$ $\quad g(x) = x^2-5x+1$ $\quad h(x) = -0.1x^2-4x-2$

III Suites numériques

exercice 5 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5-2n$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3. Que vaut u_{100} ? Calculer la somme $S = u_0+u_1+\cdots+u_{100}$.

exercice 6 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)^2-n^2$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Si oui, préciser la raison.
3. Que vaut u_{99} ? Calculer la somme $S = 1+3+5+7+\cdots+195+197+199$.

exercice 7
On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 0$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3. Que vaut u_{100} ?

exercice 8 La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$.

Que vaut u_0 ?

exercice 9 Calculer la somme $S = 1+2+3+\cdots+998+999$.

exercice 10 On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{20}$.

exercice 11 Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux type de bail :

- 1er contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.
- 2ème contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis celui du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire du 36ème mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? Justifier à l'aide de calculs.

Vocabulaire : un bail est un contrat de location.

exercice 12 Calculer la valeur exacte de la somme :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 4\,096.$$

exercice 13 Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 59\,049 \quad \text{et} \quad S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 999.$$

Dans les deux cas, on précisera s'il s'agit d'une somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique, ainsi que la raison.

IV Probabilités conditionnelles

exercice 14 Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B incompatibles tels que : $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,7$. Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

exercice 15 Un dé à 6 faces est truqué de la façon suivante : chaque numéro pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un numéro pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

exercice 16 E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$ et $A \cup C$.

exercice 17 Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.

L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.
4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

exercice 18 Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B.

La production journalière de l'usine A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.

On prélève au hasard un composant de la production d'une journée.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est égale à $0,014$.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est égale à $0,024$.

On note :

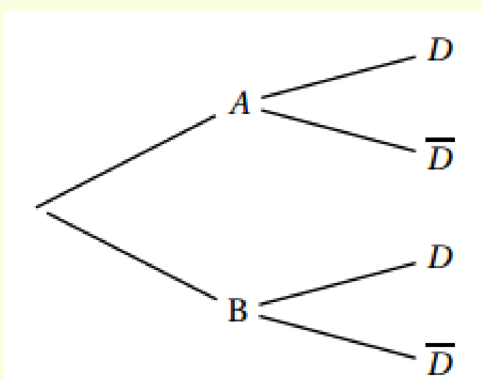
- D l'évènement : « le composant présente un défaut de soudure »
- A l'évènement : « le composant est produit par l'unité A »
- B l'évènement :« le composant est produit par l'unité B »

On note $p(D)$ la probabilité de l'évènement D et $P_A(D)$ la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.

1.(a) D'après les données de l'énoncé, préciser $P_A(D)$ et $P_B(D)$.

(b) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



3.(a) Calculer $p(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.

(b) En déduire $p(D)$.

4. On prélève dans la-production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

exercice 19 Pour une certaine expérience aléatoire, on considère deux événements A et B tels que :
$p(A) = 0,3,\ P(B) = 0,2$ et $p(A \cap B) = 0,06$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

exercice 20 Pour une certaine expérience aléatoire, on considère deux événements indépendants A et B tels que :
$p(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,7$.

Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

V Dérivation :

exercice 21 Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point E d'abscisse 3.
3. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (T).

exercice 22 Le coût total de production de x objets pour une certaine entreprise est en milliers d'euros :

$$C(x) = 180 + 12x - 0,01x^2.$$

1. Calculer la valeur exacte du coût marginal :
$$C_M(x) = C(x+1) - C(x).$$
2. Calculer $C'(x)$.
3. Quelle est l'erreur commise lorsqu'on prend $C'(x)$ comme valeur approchée du coût marginal ?

exercice 23 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point B d'abscisse 2.

exercice 24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer le nombre dérivé de f en 1.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_A) au point A d'abscisse 1 à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

exercice 25 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x - 3$.

1. Dériver $f(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_A) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse 1.
3. En se référant à l'allure de $(\mathscr{C}_f)$, pensez-vous que la dérivée de f puisse s'annuler ?

exercice 26 Une petite horlogerie suisse fabrique des montres haut de gamme. Le coût de production hebdomadaire de q montres identiques est donné en euros par : $C(q) = q^3 + 10q + 50$.

1. Calculer le coût marginal de production de la centième montre, en utilisant la définition stricte du coût marginal.
2. Calculer le coût moyen de production d'un montre pour 100 montres produites.
3. (a) Calculer $C'(q)$.
   (b) Calculer $C'(100)$.

exercice 27 Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = x^2$

$g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$

$h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$k(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$

$l(x) = 4x^2 - 3x + 1$

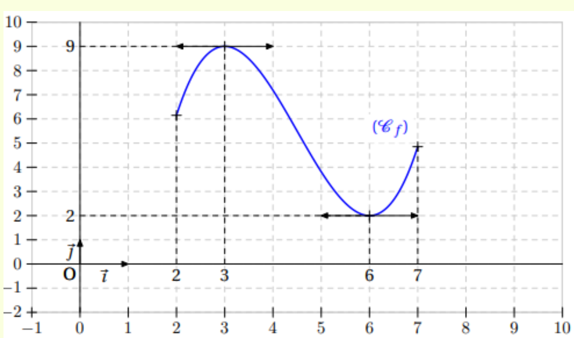
$m(x) = (2x+3)(3x-7)$

$n(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$

$v(x) = (2x^2 + 3x + 1)^2$

exercice 28 Ci-dessous est donnée la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[2 ; 7]$.

1. Par lecture graphique, donner sans justifier la valeur de : $f(3)$; $f'(3)$; $f(6)$; $f'(6)$.
2. Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$. Préciser néanmoins son signe. Expliquer.



VI La fonction exponentielle

exercice 29 **QCM**

Une expression de la dérivée de $f : x \longmapsto -5\ e^{-2x+3}$ est :

1. $(10x-3)\ e^{-2x+3}$
2. $-5+(-2)\times e^{-2x+3}$
3. $10\ e^{-2x+3}$
4. $-7\ e^{-2x+3}$

exercice 30 On considère les fonctions $f : x \longmapsto e^{2x-5}$ et $g : x \longmapsto e^{-2x+3}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1.(a) Déterminer une expression de la dérivée de f et de la dérivée de g.
  (b) Étudier le signe de chacune de ces dérivées sur $\mathbb{R}$.
  (c) En déduire les variations de f et celui de g sur $\mathbb{R}$.

2.(a) Tracer les courbes représentatives de f et de g sur un outil numérique.
  (b) Conjecturer la valeur de l'éventuelle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = g(x)$.
  (c) Valider ou corriger la conjecture émise à la question b en résolvant une équation.
  (d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) > f(x)$.

exercice 31

1. On considère la fonction $g : x \longmapsto (x-2)\ e^{-2x+6}+3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer une expression de la dérivée de g.
   (b) Donner le tableau de signes de cette dérivée de g.
   (c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donnée par la fonction g.
   (a) Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?
   (b) Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

VII Variables aléatoires

exercice 32 Un jeu consiste à lancer un dé cubique. On gagne 5 euros si on obtient un multiple de 3 et on perd 4 euros sinon.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire G ?
2. Donner les issues réalisant l'événement $\{G = -4\}$.
3. Donner les issues réalisant l'événement $\{G > 0\}$.

exercice 33 Un jeu consiste à tirer au hasard une boule dans un sac contenant 15 boules numérotées de 1 à 15. On gagne 2 € si on obtient un multiple de 2 ; 7 € si on obtient un multiple de 7 et on perd 10 € sinon.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2. Donner les issues réalisant l'événement $\{X = 9\}$.
3. Donner les issues réalisant l'événement $\{X \leqslant 0\}$.

exercice 34 X est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité donnée dans le tableau suivant :

x_i	-2	3	4	7	10
$p(X = x_i)$	0,24	0,12	0,2	0,4	0,04

Calculer $p(X \leqslant 7)$ et $p(X < 5)$.

exercice 35
On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale au double du numéro obtenu sur la face du dessus. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

exercice 36
À la boulangerie, Sandy demande à la boulangère de choisir au hasard deux beignets. Il y a six beignets à la pomme, cinq beignets choco-noisettes et neuf beignets aux fruits rouges.
On note B la variable aléatoire égale au nombre de beignets à la pomme choisis.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire B ?
2. Calculer $p(B = 2)$, $p(B = 1)$, $p(B \leqslant 1)$.

exercice 37 Un lot de dix pièces contient trois pièces défectueuses. On tire successivement et au hasard deux pièces de ce lot (sans remise). X désigne le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X ainsi que son écart-type.
3. Quelle est la probabilité que parmi les deux pièces pièces, au moins une soit défectueuse ?

exercice 38 Une variable aléatoire Z a la loi de probabilité suivante :

z_i	0	2	4
$p(Z = z_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$

Calculer l'espérance et l'écart-type de Z.

Bonnes vacances