– Consignes estivales pour préparer la rentrée –

MPSI – 1re ANNÉE

Physique-Chimie

Professeur :
M. François CHIARUTTINI(*chiaruttini@lamerci.com*)

Félicitations pour votre admission en MPSI !

Vous entrez dans une formation de l'enseignement supérieur. Cette formation est exigeante et constitue une première étape de votre parcours étudiant et un tremplin vers votre parcours professionnel. La filière MPSI – MP va vous faire découvrir les matières MATHEMATIQUES, PHYSIQUE-CHIMIE sous un angle différent de celui vu au lycée. Le rythme est soutenu et les exigences sont bien supérieures à celle du lycée. Vous allez devoir fournir un travail conséquent et surtout devoir adopter de nouvelles méthodes de travail : nous serons là pour vous accompagner !

Le document « consignes estivales pour préparer la rentrée » vous permettra d'aborder la rentrée en MPSI dans les conditions les plus sereines possibles en ce qui concerne l'enseignement de physique-chimie. Considérer que ce devoir est un SOCLE sur lequel vous pourrez vous appuyer dès les premiers mois. Il est autorisé de s'aider pour répondre aux questions et surtout :

1) chercher à comprendre la logique des exercices
2) faites l'effort d'apprendre par cœur ce qui est demandé d'être appris.

Réaliser ce travail de manière la plus appliquée possible.. Idéalement, vous y consacrerez sept à huit séances de deux heures. La semaine précédant la rentrée reposez-vous de manière à arriver en pleine forme le jour.

Vous trouverez sur le lien ci-dessous des indications et éléments de correction :

https://drive.google.com/drive/folders/1rwQnBTFjYgdYaFtIiZwbWRXf6pUtljdo?usp=sharing

Bon courage !

Lettres grecques à apprendre : mémoriser également l'écriture de leur nom en français.

alpha	*bêta*	gamma	delta	epsilon	zêta	thêta	kappa	lambda	nu	êta
α	β	γ, Γ	Δ, δ	ε	ζ	θ	κ	λ	ν	η

ksi (xi)	pi	rhô	sigma	tau	phi	chi	psi	oméga	mu
ξ	π, Π	ρ	σ, Σ	τ	φ, Φ	χ	ψ	ω, Ω	μ

Travail à rendre sur feuille, rédigé à la main pour le jour de la rentrée

Dimensions et unités de base du Système international (lien *wikipedia.fr*)

Apprendre le contenu du tableau suivant

Dimension	Symbole de la dimension	Unité SI	Symbole de l'unité
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Température thermodynamique	θ	kelvin	K
Intensité du courant électrique	I	ampère	A
Éclairement perçu par l'œil humain	J	candela	cd
Quantité de matière	N	mole	mol

Conversions d'unités angulaires : radians *vs* degrés

Exemple : 20,0 ° à convertir en radians : $20 \times \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}349$ rad.

Convertir en radians les angles suivants : $\alpha_1 = 11{,}2$ ° et $\alpha_2 = 5° \, 31' 40''$

Convertir en degrés les angles suivants : $\beta_1 = 0{,}200$ rad et $\beta_2 = -3\pi/4$ rad

Conversions de température : degrés Celsius *vs* kelvins

Qu'est-ce que le « zéro absolu » ?

Exemple : $\theta = 20$ °C à convertir en kelvin : $T = 20 + 273{,}15 = 293{,}15$ K.

Convertir en kelvins les températures suivantes : 100 °C ; 700 °C ; -196 °C.

Convertir en degrés Celsius les températures suivantes : 4,0 K ; 90,2 K ; 700 K ;

Multiples et sous multiples

Donner et apprendre par cœur, les noms et symboles des sous-multiples et multiples entre 10^{-15} et 10^{+15}.

Conversions

Méthode en vidéo

- $5\ cm^3 = 5\ (cm)^3 = 5\ (10^{-2}\ m)^3 = 5.10^{-6}\ m^3 = \underline{5.10^{-3}\ L = 5\ mL}$
- $1\ L = 1\ dm^3 = 1\ (dm)^3 = 1.(10^{-1}\ m)^3 = 10^{-3}\ m^3 = \underline{0{,}001\ m^3}$
- $\rho_{Cu} = 1{,}7\ \mu\Omega.cm = 1{,}7\ (10^{-6}\ \Omega).(10^{-2}\ m) = \underline{1{,}7.10^{-8}\ \Omega.m}$
- $E_{\text{air sec}} = 36\ kV.cm^{-1} = 36\ (10^3\ V)/(10^{-2}\ m) = 36\ 10^3 \times 10^2 = 36.10^5 = \underline{3{,}6.10^6\ V.m^{-1}}$

Les résultats doivent être donnés en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme :

$$a \times 10^n \text{ avec } a \in [1\,;10[\quad \text{et } n \in \mathbb{Z}.$$

1. 0,29 µm = ... m
2. 1,5 µm = ... cm
3. 411 km = ... m
4. 85 fm = ... nm
5. 4,0 GJ = ... nJ
6. 130 cm^2 = ... m^2
7. 10^{-6} m^2 = ... µm^2
8. 1 m^3 = ... L
9. 25 mg.L^{-1} = . . . kg.m^{-3}
10. 0,0028 m^3 = . . cm^3
11. 1 m/s = . . . km/h
12. 20 µΩ.cm = . . Ω.m
13. 20 m^3/h = . . . m^3/s
14. 1,3 g/cm = . . . kg/m
15. 2,8 kV.cm^{-1} = . . . V.m^{-1}

Ecriture scientifique et chiffres significatifs

Ecrire chacun des nombres suivants en écriture scientifique :

91 954 321 et 0,00008739

- avec 2 chiffres significatifs et avec 3 chiffres significatifs (attention aux arrondis).

Chimie

Composés ioniques

Donner, en s'aidant du modèle ci-dessous,

Nom du composé ionique	Nom du cation	Nom de l'anion	Ions constitutifs	Formule du composé
chlorure de calcium	cation calcium	anion chlorure	$(Ca^{2+}, 2\ Cl^-)$	$CaCl_2$ (s)

les formules et les ions constitutifs (noms et formules) des cristaux ioniques suivants :

chlorure de calcium, nitrate d'argent, chlorure ferreux (ou de fer II), chlorure ferrique (ou de fer III), sulfate ferreux, sulfate ferrique, hydroxyde de fer II, hydroxyde de fer III, chlorure de potassium, chlorure de magnésium, chlorure d'ammonium, carbonate de potassium, carbonate de calcium, éthanoate de sodium, phosphate de magnésium.

Acides et bases faibles

Pour chacune des espèces chimiques suivantes, préciser sa nature (acide ou base), donner l'espèce acido-basique conjuguée et la nommer :

NH_3, CH_3COOH, CO_3^{2-}, SO_4^{2-}, H_3PO_4.

On s'aidera de l'exemple suivant :

Espèce, nature	Nom	Espèce conjuguée, Nature	Nom
NH_3, base	Ammoniac	NH_4^+, acide	Ion ammonium

Comment se nomment les ions HO^- (aq) et H_3O^+(aq) ?

Donner la formule de l'acide sulfurique.

Dissolution des composés ioniques

[Vidéo](#) expliquant la méthode

Chlorure de calcium $\Rightarrow$ $CaCl_2(s) = (1\,Ca^{2+}, 2\,Cl^-)$

anion Cl^- cation Ca^{2+}

DISSOLUTION DANS L'EAU (HYPOTHÈSE : réaction TOTALE)

(moles)	$1\,CaCl_2(s)$ $\xrightarrow{H_2O}$	$1\,Ca^{2+}(aq)$ +	$2\,Cl^-(aq)$
état initial (e.i)	n_0	0	0
état final (e.F.)	0	n_0	$2n_0$

Soit V le volume de la solution, les concentrations finales des espèces ioniques sont :

$$\begin{cases} [Ca^{2+}]_f = \dfrac{n_0}{V} \\ [Cl^-]_f = \dfrac{2n_0}{V} \end{cases}$$

Phosphate de calcium $\Rightarrow$ $(2\,PO_4^{3-}, 3\,Ca^{2+}) = Ca_3(PO_4)_2$

PO_4^{3-} Ca^{2+}

DISSOLUTION dans l'eau (TOTALE)

	$Ca_3(PO_4)_2$ $\xrightarrow{H_2O}$	$3\,Ca^{2+}(aq)$ +	$2\,PO_4^{3-}(aq)$
e.i.	n	0	0
e.F.	0	$3n$	$2n$

Exercice : on dissout 0,10 mol de **chlorure de calcium** dans 250 mL d'eau, la dissolution est totale. Déterminer la concentration de chacun des ions en solution aqueuse.

Correction :

	$CaCl_2(s)$ $\xrightarrow{H_2O}$	$Ca^{2+}(aq)$ +	$2\,Cl^-(aq)$
état initial	0,10	0	0
état final	0	0,10	$2 \times 0{,}10$

Les concentrations finales sont $[Ca^{2+}] = 0{,}1/0{,}250 = \underline{\mathbf{0{,}40\ mol.L^{-1}}}$ et $[Cl^-] = 2 \times 0{,}10/0{,}250 = \underline{\mathbf{0{,}80\ mol.L^{-1}}}$. Mêmes questions pour la dissolution de 0,20 mol de chlorure ferrique dans 1,0 L d'eau, de $2{,}0\ 10^{-3}$ mol de sulfate ferreux dans 200 mL d'eau et de 10 mmol de sulfate ferrique dans 500 mL d'eau.

Acides et bases fortes

Donner les noms et formules des molécules ou ions contenus dans les solutions aqueuses suivantes : solution d'acide chlorhydrique, d'acide nitrique, de soude, de potasse.

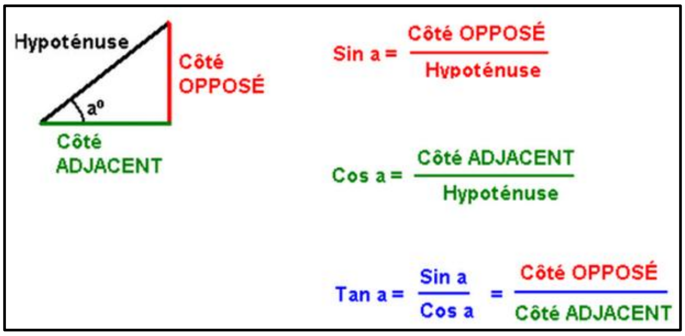
On écrira l'équation bilan de la réaction de dissociation dans l'eau ainsi que les espèces majoritaires et les espèces minoritaires dans la solution. On s'aidera de l'exemple suivant :

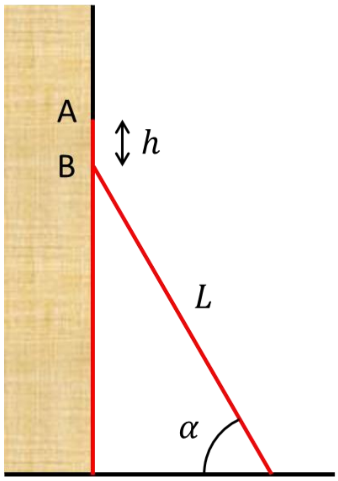
Solution	Type de réactif et équation bilan	Espèces majoritaires	Espèces minoritaires
d'acide chlorhydrique = HCl (gaz) dans l'eau.	HCl = **acide fort**, donc il est totalement dissocié dans l'eau. $HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+(aq) + Cl^-(aq)$	$H_3O^+(aq)$ $Cl^-(aq)$	$OH^-(aq)$

Retenir par cœur les noms et formules de toutes les entités citées en chimie.

Trigonométrie

Cosinus, sinus et tangente dans un triangle rectangle.



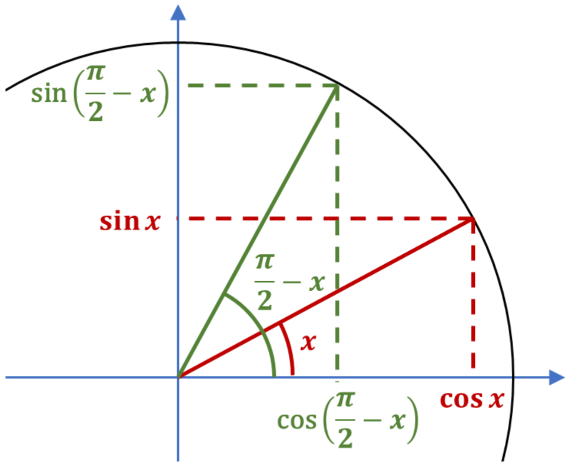


Application : une échelle de longueur L est posée verticalement le long d'un mur perpendiculaire au sol. On éloigne l'extrémité de l'échelle posée sur le sol tel de l'angle de l'échelle avec l'horizontal est $\alpha = 70\ °$ (cf schéma ci-contre).
Exprimer la hauteur h dont descend l'extrémité de l'échelle posée sur le mur. On exprimera h en fonction de L et α. Application numérique : calculer h pour $L = 3{,}00$ m et $\alpha = 70{,}0\ °$.

Compléter et savoir par cœur :

$\sin(a+b) =$ $\cos(a+b) =$	$\cos^2 a =$ $\quad \cos 2a =$ $\sin^2 a =$ $\quad \sin 2a =$	$\sin(p)\sin(q) =$ $\cos(p)\cos(q) =$ $\sin(p)\cos(q) =$

Connaître le cercle trigonométrique et les valeurs particulières d'angles $\left(0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi\right)$.
Savoir s'en servir pour retrouver aisément :



$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) =$ $\qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) =$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) =$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$ $\qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) =$

$\sin(\pi - x) =$ $\qquad \sin(\pi + x) =$

$\cos(\pi - x) =$ $\qquad \cos(\pi + x) =$

Optique : lois de la réflexion et lois de la réfraction

https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_de_Snell-Descartes#Lois_de_Snell-Descartes_pour_la_r%C3%A9flexion

- Définir l'angle d'incidence d'un rayon lumineux sur un dioptre plan.
- Enoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion.
- Enoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction.
- Accompagner ces lois d'un schéma explicite.

Application : calculer l'angle de réfraction pour un angle d'incidence de 20 ° d'un rayon passant de l'eau $n_{\text{eau}} = 1{,}33$ vers du verre $n_{\text{verre}} = 1{,}50$. Reprendre le calcul dans la situation où le rayon, toujours sous incidence de 20 ° se propage dans le sens verre → eau.

Unités usuelles :

Donner et connaître les unités usuelles du système SI des grandeurs physiques suivantes : surface, volume, masse, durée, fréquence, force, pression, énergie, puissance, vitesse, accélération, tension électrique, intensité du courant, charge électrique, résistance électrique, capacité électrostatique, inductance d'un circuit électrique.

Relations générales entre grandeurs physiques :

Donner les relations reliant les triplets de grandeurs physiques suivantes :

- Energie E, puissance P, durée Δt.
- Vitesse V, distance parcourue à vitesse uniforme D, durée Δt.
- Force F, pression p, aire S de la surface sur laquelle s'exerce la pression uniforme.
- Tension U, intensité I du courant parcourant la résistance R.
- Nombre de moles n, masse de corps pur m, masse molaire de ce corps pur M.
- Concentration molaire c d'une espèce en solution, nombre de moles n de cette espèce et volume V de la solution dans laquelle elle est dissoute.
- Charge q portée par les armatures d'un condensateur de capacité C et tension u_c aux bornes de ces armatures.
- Poids P d'un corps, masse m de ce corps, intensité g du champ de pesanteur.
- Longueur d'onde λ, célérité c, période T de l'onde sinusoïdale.
- Energie cinétique E_c d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$, vitesse V de ce point matériel par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ et masse m de ce point matériel.

Pour chaque cas, écrire les trois relations donnant une grandeur en fonction des deux autres. Pour chaque grandeur, préciser *l'unité* et *son symbole* dans le système international. Exemple : énergie (joule, J) / puissance (watt, W) / durée (seconde, s).

(1) L'énergie accumulée au cours d'une durée Δt pour une puissance P constante est

$$\boxed{E = P \times \Delta t}$$

(2) La puissance moyenne correspondant à un échange d'énergie E pendant la durée Δt est

$$\boxed{P = \frac{E}{\Delta t}}$$

(3) La durée Δt nécessaire pour échanger l'énergie E selon une puissance constante P est

$$\boxed{\Delta t = \frac{E}{P}}$$

Apprendre par cœur une des relations reliant les triplets des trois grandeurs et savoir en déduire rapidement les deux autres. **Connaître parfaitement les unités.**

Application : déterminer la vitesse d'un point matériel de 100 g et d'énergie cinétique 5 J.

Atomistique :

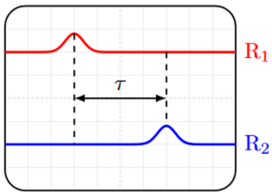
Qu'appelle-t-on « isotopes » d'un élément chimique ? Citer deux exemples.

Pour chacun des nucléides suivants ${}^{12}_{6}C$, ${}^{14}_{6}C$, ${}^{16}_{8}O$ et ${}^{64}_{30}Zn$, déterminer :

- Son numéro atomique,
- Son nombre de masse (ou nombre de nucléons),
- Le nombre de protons dans son noyau,
- Le nombre de neutrons dans son noyau.

Ondes : savoir les définitions et relations suivantes

1) Une **onde progressive à une dimension** est une perturbation qui se propage, sans transport de matière, dans une seule direction de l'espace et qui se retrouve à l'identique un peu plus loin, un peu plus tard.
   Illustration : deux récepteurs R_1 et R_2 voient passer le même signal mais à des dates différentes.



2) Onde progressive sinusoïdale
   Une onde progressive est dite sinusoïdale si, à une position fixée du milieu, **son évolution en fonction du temps** est, décrite par une fonction sinusoïdale :

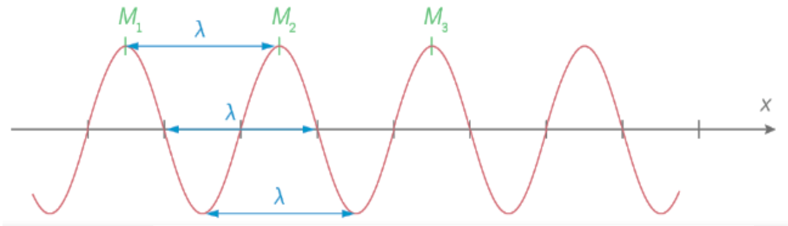
$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \underline{\text{à une position fixée du milieu.}}$$

   La **période temporelle** est la durée séparant la répétition d'un même motif <u>à une position fixée</u>. Pour une onde sinusoïdale la période est liée à la **pulsation** ω par :

$$\boxed{T = 2\pi/\omega}.$$

   La **fréquence** est le nombre de répétitions du motif par unité de temps, $\boxed{f = 1/T}$.
   La longueur d'onde (ou période spatiale, généralement notée λ) est la **distance séparant deux maximas consécutifs** du signal (cf figure ci-dessous).
   On appelle **célérité de l'onde** la vitesse de propagation de l'onde.

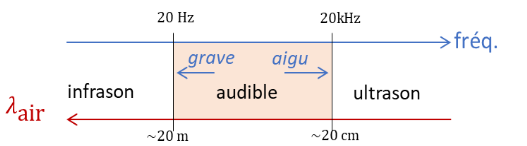
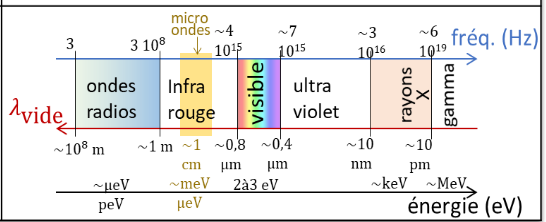
3) Lien entre période temporelle, célérité et longueur d'onde
Soit une onde sinusoïdale se propageant dans un milieu matériel à la célérité c. Si le signal est maximal en une position x_1 donnée, au bout d'une durée T, il se propagera sur la distance $d = cT$ où l'on retrouve donc ce maxima. D'autre part, à la position initiale x_1, le signal étant périodique de période T, le signal se trouve à nouveau maximal. Ainsi, la distance séparant deux maxima consécutifs (M1 et M2 sur la figure ci-contre), distance appelée « longueur d'onde » et que l'on note λ vérifie



allure de l'onde à une date t fixée

$$\boxed{\lambda = cT}.$$

Apprendre les célérités et des longueurs d'onde données dans le tableau suivant :

Ondes	Signaux associées	Milieu	Célérité (ordre de grandeur)	Domaines fréquentiels
Sonores	surpression $\tilde{p}$ (Pa) vitesse v (m.s^{-1})	Matériel air liquide solide	$c_{air} \approx 340$ m.s^{-1} (à 15°C) $c_{eau} \approx 1500$ m.s^{-1} $c_{acier} \approx 5500 - 6000$ m.s^{-1}	
Electro-magnétiques	Champs: électrique $\vec{E}$ (V.m^{-1}) magnétique $\vec{B}$ (T)	Immatériel (vide) Milieux transparents gaz diélectriques ex : verre, eau	$c_0 \approx 3{,}00 \times 10^8$ m.s^{-1} $c_{milieu} = c_0/n_{milieu}$ $c_{air} \approx c_0/n_{air}$, $n_{air} \approx 1{,}0003$ $n_{verre} \approx 1{,}4 - 1{,}7$ $n_{eau} \approx 1{,}33$	

Exercice d'applications sur les ondes

a) Déterminer la célérité d'une onde sinusoïdale de période 2,25 ms et de longueur d'onde 77,3 cm.

b) Déterminer la fréquence d'une onde sinusoïdale de longueur d'onde 510 nm se propageant à la célérité $3{,}00\ 10^{8}$ m.s^{-1}.

c) Déterminer la longueur d'onde d'une onde sinusoïdale parcourant 1,0 m en 6,72 ms et dont la pulsation est de 5000 rad.s^{-1}.

Proposer un milieu de propagation et un type d'onde pour chacun des cas a), b) et c).

Compétences numériques

Lire le document numérique « binder » disponible à l'adresse suivante :

BinderMPSI

Effectuer le tutoriel « prise en main (rapide) de Jupyter Notebook ».

NumpyLaMerci

Vous trouverez des cours, exercices résolus et exercices d'entrainement sur les principales compétences numériques en CPGE, 1ère

- Outils graphiques Numpy_1 (nuage de points, tracé de fonction, courbe paramétrée) [Correction]
- Outils statistiques Numpy_2 (simulation de variables aléatoires, tracé d'histogramme, régression linéaire) [Correction]
- Fichiers de données et tableurs Numpy_2bis (module *pandas*, format csv : création et lecture de fichier)
- Estimation des incertitudes Numpy_3 (type A = répétabilité, estimation de type B, composition) [Correction]
- Résolution approchée des équations algébriques Numpy_4 (méthode dichotomique) [Correction]
- Résolution approchée des équations différentielles : méthode d'Euler et *odeint* Numpy_5 (système dynamique, conditions initiales, approximation à gauche de la dérivée première, vectorisation, odeint de scipy.integrate) [Correction]

AUTRES

- Barycentre d'un système de points matériels (barycentre de deux points, cas d'un ensemble de points, coordonnées du barycentre, calcul des coordonnées du barycentre en Python) [Correction]

Syntaxe	Rôle
	importation des modules
import numpy as np	importe le module *numpy* et crée l'alias np sur les fictions de ce module
from math import *	importe l'ensemble du module math sans alias, non recommandé
import matplotlib.pyplot as plt	importe le sous module pyplot contenant les fonctions graphiques
	tracé d'un nuage de points
plt.plot(xi, yi, '+r')	affiche le nuage de points de coordonnées xi, yi avec des croix "+" rouges non-re
	tracé d'une fonction
> def f(x): # Attention à l'indentation	définition de la fonction à tracer (ici $x \rightarrow \sin(x^2) - 1$)
`> return np.sin(x**2)-1`	
xi = np.linspace(-5, 5, 10**3)	création d'une liste de 1000 valeurs équiréparties sur $[-5; 5]$
plt.plot(xi, f(xi), '-b')	Tracé des points de coordonnées *xi,f(xi)* avec une ligne bleue
	tracé d'une courbe paramétrée
ti = np.linspace(0, 10, 10**3)	liste des valeurs de dates t_i sur l'intervalle $[0; 10]$
xi = np.cos(2*ti) yi = np.sin(3*ti)	calcul des coordonnées *xi,yi* des points pour toutes les valeurs du paramètre t_i.
plt.plot(xi, f(xi), '-k')	tracé de la courbe paramétrée,les points étant reliés par un trait noir
	complément : mise en forme
plt.title("Titre du graphe")	Titre du graphe
plt.xlabel("Titre de l'axe X")	Titre de l'axe horizontal
`plt.ylabel(r"Grandeur Y : $\alpha\$ (rad)")`	Utilisation de LaTeX (symbole grec de la lettre alpha) dans du texte Python

<u>Lire intégralement le document</u> « Outils graphiques Numpy 1 » et mémoriser les instructions de base pour l'importation des modules, le tracé d'un nuage de points, le tracé d'une fonction et le tracé d'une courbe paramétrée plane (cf memento page précédente).

Résumé en vidéo sur l'exemple ci-dessous :

> Tracer la représentation graphique de la fonction
> $$s : t \mapsto s(t) = A\, e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos(2\pi f t)$$
> avec $A = 2$ mm, $\tau = 10^{-3}$ s et $f = 2{,}5$ kHz.
> On se limitera à l'intervalle $t \in [-3\tau\,;\,3\tau]$

AUTRES OUTILS MATHEMATIQUES GENERAUX

Géométrie du plan :

On considère le plan (Oxy) muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère quatre points de ce plan dont les coordonnées sont données dans $\mathcal{R}$ $A(2{,}3)$, $B(4{,}1)$, $C(3{,}0)$, $D(1{,}2)$.

a) Faire une figure représentant l'origine O du repère, les axes (Ox) et (Oy), les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Y placer les points A, B, C et D.

b) Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Calculer leur norme.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire l'angle $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}\right)$

d) Déterminer l'équation de la droite passant par les points A et C.

e) Déterminer les coordonnées du point M, intersection des droites (AC) et (BD).

f) Calculer la distance OM et établir l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

<u>Indication</u> : pour c) on rappelle que, pour tout couple de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

Exercices de calcul, révisions du secondaire :

Fractions

Simplifier les fractions suivantes (le calcul doit être fait « à la main » et non pas à la calculatrice).

$$A = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{11}} \qquad B = \frac{\frac{2}{3}}{11} \qquad C = \frac{2}{\frac{3}{7}} \qquad D = \frac{A-B}{C} \qquad E = \frac{10^{-1}}{(10^{-4})^3} \times \frac{(10^2 \times 10^{-3})^2}{\frac{1}{10^{-1}}}$$

Logarithmes

a) Calculer en simplifiant au maximum $A = \ln(56) - \ln(7) + \ln(4)$

b) Soit x_1 et x_2 deux réels positifs. On pose $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. On définit $B = \ln\left(\frac{\bar{x}}{x_1}\right) + \ln\left(\frac{\bar{x}}{x_2}\right)$.

Montrer que, quels que soient x_1 et x_2, $B \geq 0$.

c) Soit $k(T) = A\, e^{-\frac{E_a}{RT}}$ avec $E_a, A,$ R des grandeurs constantes positives et T une température en kelvins supposée variable.

- Exprimer la dérivée $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}T}$, en déduire comment varie k lorsque T augmente.
- On pose $Y = \ln k$ et $X = 1/T$. Montrer que la relation $Y = f(X)$ est une relation affine que l'on mettra sous la forme $Y = p \times X + b$. Exprimer les constantes p et b.

d) On donne $f(x) = f_0\left(1 - e^{-\frac{x}{\ell}}\right)$ avec f_0, ℓ des constantes réelles positives. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}^+$ l'inégalité : $f(x) \geq 1/2$ (on supposera que $f_0 > 1/2$). Montrer que l'on a $x \geq x_0$ où x_0 sera exprimé en fonction de ℓ et f_0 uniquement.

Résolution d'équations

a) Soit α une grandeur réelle de l'intervalle [0 ; 1] vérifiant l'équation suivante :

$$K = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}$$

Etablir l'expression de α en fonction de la constante K.

b) Soit u_1 et u_2 deux grandeurs vérifiant les relations suivantes :

$$u_1 - u_2 = E$$
$$I = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}$$

Avec E, I, R_1 et R_2 des constantes. Exprimer les grandeurs u_1 et u_2 en fonction de ces constantes.

Dérivation

Les grandeurs a, A, ω_0 et R sont des constantes.

a) On définit les fonctions suivantes :

$f : z \mapsto \sqrt{a+z}$ $\qquad$ $x : t \mapsto A \times \sin(\omega_0 \times t)$ $\qquad$ $h : x \mapsto \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$

Exprimer les dérivées $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$

b) Calculer la dérivée composée : $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ avec $h(t) = \frac{R}{\sqrt{R^2+x(t)^2}}$

Nombres complexes

Soit R_1, R_2, Y_1 et Y_2 des constantes réelles positives, on note i le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ radians, tel que $i^2 = -1$.

On définit les quatre grandeurs complexes suivantes, dépendant de la variable réelle x positive :

$Z_1 = R_1 + iR_2x$ $\qquad$ $Z_2 = \frac{-i}{Y_1x}$ $\qquad$ $Z_3 = \frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$ $\qquad$ $H_1 = \frac{R_1}{Z_1}$ $\qquad$ $H_2 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$

a) Exprimer, en fonction des constantes R_1, R_2, Y_1 et Y_2 et de la grandeur variable x, les modules des complexes Z_1 et Z_2.

b) Exprimer le module $|Z_s|$ du complexe $Z_s = Z_1 + Z_2$ en fonction de x et des constantes R_1, R_2 et Y_1.

c) En déduire la dérivée $\frac{\mathrm{d}|Z_s|}{\mathrm{d}x}$ et déterminer la ou les valeurs de la variable x qui rende(nt) le module $|Z_s|$ minimum.

d) Etablir les expressions des modules des complexes H_1 et H_2. <u>Indication</u> : on utilisera, pour calculer le module, le fait que le module d'un quotient (d'un produit) est égal au quotient (au produit) des modules.

Intégration

a) En utilisant $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, exprimer, en fonction de $T = 2\pi/\omega$, a et b, l'intégrale suivante : $I = \int_a^b \cos^2(\omega \times t)\,\mathrm{d}t$

Que devient cette intégrale pour $b = a + n \times T$ avec $n \in \mathbb{Z}$?

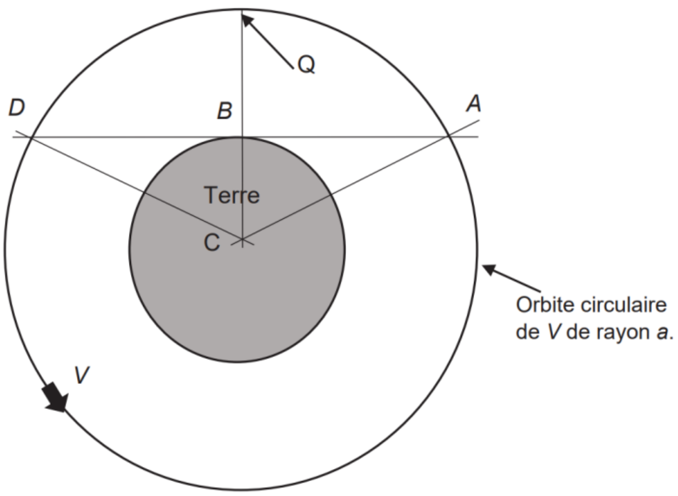
b) On pose $v(t) = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ où τ et v_0 sont des constantes. Evaluer l'intégrale suivante

$$x(t_f) = \int_{t=0}^{t=t_f} v(t)\, \mathrm{d}t$$

Exercice de raisonnement (facultatif, pour les plus motivé(e)s) :

La Terre est assimilée à une boule de rayon R_T. Un satellite de la Terre, noté « V », possède par rapport à la Terre, une orbite circulaire de rayon a. Depuis le point B situé sur la surface de la Terre, un observateur observe le mouvement du satellite. On appelle Q la projection verticale du point B sur l'orbite de V (cf schéma ci-dessous).

La **durée de visibilité** Δt du vaisseau V par l'observateur en B correspond à l'intervalle de temps entre son apparition en A à l'horizon de B et sa disparition en D de l'horizon de B.



a) Sachant que le mouvement du satellite par rapport à la Terre est *uniforme* (c'est-à-dire qu'il s'effectue à vitesse de valeur constante), exprimer la relation entre la période T de révolution, la vitesse v du vaisseau V et le rayon a de son orbite.

b) En déduire l'expression de la vitesse v en fonction du rayon de l'orbite et de la fréquence de rotation $f = 1/T$. Exprimer alors la vitesse v en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi f$.

QUESTION COMPLEMENTAIRE

c) Exprimer, en fonction de T, de R_T et de a, la durée Δt de visibilité du satellite V.

Indication

Pour cette question, on sera amené à utiliser l'une des fonctions trigonométriques réciproques arccos ou arcsin pour résoudre une équation du type $\cos(x) = Y$ ou $\sin(x) = Y$

On donne :

- Pour $x \in [0; \pi]$ et $Y \in [-1; 1]$, $\cos x = Y \Leftrightarrow x = \arccos(Y)$

- Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $Y \in [-1; 1]$, $\sin x = Y \Leftrightarrow x = \arcsin(Y)$